

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ DE M'SILA MOHAMED MOHAMED BOUDIAF  
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES**

**MEMOIRE DE FIN D'ETUDE**

**Présenté pour l'obtention du Diplôme de Master**

**Domaine :** Mathématiques et Informatique

**Filière :** Mathématiques

**Option :** Fondamentales et Appliquées

**Par**

**ABDELHAG Marwa**

**THÈME**

**Ecoulement bidimensionnel de type cavité**

Université de M'sila

29/05/2017

Devant le jury :

Mr. Mostefa NADIR	Prof. Univ de M'sila	Président
Mr. Abdelkader GASMI	Prof. Univ de M'sila	Rapporteur
Mr. Bachir GAGUI	MCB. Univ de M'sila	Examineur

**Promotion :** 2016/2017

---

# Remerciements

Le remerciement infini avant tout est à **Allah** qui m'a donné la force de rédiger ce modeste travail.

J'exprime mes profonds remerciements à Monsieur Gasmi Abdelkader, encadreur de ce mémoire, pour son aide précieuse, ses encouragements, et son soutien favorable pour l'aboutissement de ce travail.

Je remercie vivement les membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mon travail de mémoire.

Je suis très reconnaissant à mes parents, à mes frères et mes soeurs, qui ont su rester à mes côtés tout au long de la réalisation pratique de ce mémoire.

Enfin, je remercie toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

# Dédicaces

Je dédie ce travail à :

-mes très chers parents

-mes soeurs

-mes frères

-toute la famille

-toutes mes amies.

A tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin pour réaliser ce travail.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Notions préliminaires sur la mécanique des fluides</b>	<b>2</b>
1.1 Introduction . . . . .	2
1.2 Les fluides . . . . .	3
1.2.1 Définition d'un fluide . . . . .	3
1.2.2 Propriétés des fluides . . . . .	3
1.2.3 Description Lagrangienne . . . . .	5
1.2.4 Description Eulérienne . . . . .	7
1.2.5 Trajectoire . . . . .	8
1.3 Notions fondamentales sur les écoulements . . . . .	8
1.3.1 Ecoulement irrotationnel . . . . .	8
1.3.2 Ecoulement incompressible . . . . .	9
1.3.3 Ecoulements bidimensionnels d'un fluide incompressible. . . . .	9
1.3.4 Ecoulement dans un angle; écoulement autour d'une plaque infinie; écoulement de point d'arrêt. . . . .	10
1.3.5 Lignes de courant . . . . .	12
1.4 Quelques équations de la mécanique de fluide . . . . .	13
1.4.1 Equation de continuité . . . . .	13
1.4.2 Equation d' Euler . . . . .	14
1.4.3 Equation de Bernoulli pour un fluide homogène incompressible . . . .	15
1.5 Transformation de Schwarz-Christoffel . . . . .	16

1.6	Fonctions analytiques (ou holomorphes) . . . . .	18
1.7	Potentiel complexe, Vitesse complexe . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Solution analytique du problème bidimensionnel</b>	<b>22</b>
2.1	Méthode de l'hodographe . . . . .	22
2.2	Position de problème . . . . .	23
2.3	Résolution du problème . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Résolution numérique du problème bidimensionnel</b>	<b>37</b>
3.1	Formulation générale du problème . . . . .	37
3.2	Procédure numérique . . . . .	43
3.2.1	Comportement local de la vitesse au voisinage des singularités . . . .	45
3.3	Formulation de la série . . . . .	48
3.4	Conclusion générale . . . . .	50
	<b>Conclusion générale</b>	<b>50</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>52</b>

# Introduction

Les écoulements de fluide de type jet ou cavité sont fréquemment rencontrés aussi bien dans la nature que dans l'industrie. Les domaines d'applications sont nombreux et variés : les chambres de combustion des moteurs, les pompes à jet, les réservoirs et l'architecture des barrages.

Dans le présent travail, on se propose d'étudier un écoulement à surface libre en raison d'un jet. L'écoulement est supposé potentiel, bidimensionnel et irrotationnel, En négligeant les tensions de surface et les forces de gravité, pour trouver la solution exacte, nous allons utiliser la transformation conforme d'hodographe dû à Kirchhoff (1869) et la transformation Schwarz-Christoffel. Et on résout le problème numériquement après on cherche une solution asymptotique en considérant les paramètres du problème.

Ce mémoire de fin d'études comporte trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous avons abordé les notions fondamentales de mécanique des fluides dont nous avons besoin dans notre étude.

Concernant le deuxième chapitre, on a étudié les transformations conformes en générale, en citant quelques cas particuliers, la transformation de Schwarz-Christoffel et la méthode de la ligne de courant libre. Nous utilisons ces transformations pour obtenir la solution exacte du problème posé .

Dans le dernier chapitre, on étudie le même problème posé dans le deuxième chapitre, en tenant compte de l'effet de la tension de surface. En utilisant la méthode de troncation de la série introduite par Vanden-Broeck et Keller ; qui consiste à discrétiser uniquement la surface libre. Par cette méthode on a pu déterminer avec précision la nature de singularité du vecteur vitesse aux points de contacts.

# Chapitre 1

## Notions préliminaires sur la mécanique des fluides

**Résumé :** Dans ce chapitre, on présente quelques définitions et notions préliminaires concernant les propriétés des fluides, les écoulements potentiels, bidimensionnels et les équations générales du mouvement des fluides.

### 1.1 Introduction

La mécanique des fluides est une science de la mécanique appliquée qui concerne le comportement des liquides et des gaz au repos ou en mouvement. Cette branche de la mécanique englobe une variété de problèmes allant de l'étude de l'écoulement sanguin dans des capillaires déformables (vaisseaux sanguins de diamètre de quelques microns) à l'écoulement de pétrole brut dans des conduites de l'ordre du mètre de diamètre avec des longueurs pouvant aller jusqu'à  $13000\text{km}$ . Les principes de la mécanique des fluides sont nécessaires pour expliquer pourquoi les avions volent et quel est le profil d'aile idéal pour avoir un vol le plus efficace possible en termes de coûts liés au kérosène et de vitesse d'avion alors que les balles de golf à aspérités servent à lancer la balle plus loin grâce au décollement tardif de la couche limite dans le cas d'un écoulement turbulent.

## 1.2 Les fluides

### 1.2.1 Définition d'un fluide

Un fluide est défini comme un milieu continu ne pouvant être maintenu au repos lorsque des efforts de cisaillement lui sont appliqués. Dans la plupart des cas, cette propriété caractéristique est suffisante pour établir une distinction claire entre fluides et solides. On peut cependant remarquer qu'il existe des matériaux tels que les polymères dont le comportement se rapproche de celui des solides ou de celui des fluides selon l'intensité des efforts appliqués. Ces milieux complexes ne seront pas étudiés ici.

Les fluides se composent des liquides et des gaz. D'un point de vue mécanique, un gaz se distingue d'un liquide principalement par sa plus grande compressibilité : les variations relatives de masse volumique résultant d'une variation donnée de pression y sont beaucoup plus grandes. Cependant, dans certaines classes d'écoulements liquides ou gazeux, les variations de masse volumique sont suffisamment faibles pour qu'en première approximation, le fluide soit considéré comme incompressible. Enfin, il faut souligner que liquides et gaz sont régis par les mêmes lois de la mécanique des fluides.

### 1.2.2 Propriétés des fluides

**Masse volumique** C'est la masse de l'unité de volume. L'unité est le kilogramme par mètre cube ( $\text{kg.m}^{-3}$ ).

$$\rho = \frac{\text{masse}}{\text{volume}} = \frac{m}{v}$$

La masse volumique d'un gaz change avec la pression mais celle d'un liquide peut être considérée comme constante en général.

**Exemple 1.2.1** pour l'eau  $\rho = 1000 \text{kg.m}^{-3}$ ; pour l'air  $\rho = 1,293 \text{kg.m}^{-3}$ .



**La densité**  $d = \frac{\text{masse volumique d'un corps}}{\text{masse volumique}}$  = un nombre sans dimension.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{de l'eau (liquides ou solides)} \\ \text{de l'air (pour les gaz)} \end{array} \right.$

mention.

**Exemple 1.2.2** *huile minérale*  $= 920 \text{ kg.m}^{-3}$ , densité correspondante  $d = 0,92$ .

**Volume spécifique** C'est l'inverse de la masse volumique par unité de masse est appelé aussi volume massique et est défini par :

$$v = 1/\rho \quad [m^3.kg^{-1}]$$

**La viscosité** C'est une propriété importante. Elle caractérise les frottements internes ou intermoléculaires à l'intérieur du fluide, autrement dit sa capacité à s'écouler.

La propriété inverse est la fluidité. La température a une grande influence sur la viscosité des fluides. Celle-ci diminue lorsque la température augmente.

### 1. Viscosité cinématique $v$

Elle est déterminée, pour les liquides, en mesurant à une température donnée la durée d'écoulement d'un volume connu de liquide à travers un appareil comportant un orifice (tube capillaire) de dimensions normalisées. L'unité est le mètre carré par seconde ( $m^2.s^{-1}$ ).  
 $1st = 1stoke = 10^{-4}m^2.s^{-1} = 100cst$ .

$$v = \frac{\mu}{\rho} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu \text{ viscosité dynamique (P}\ell\text{)} \\ \rho \text{ masse volumique (kg.m}^{-3}\text{)} \end{array} \right.$$

## 2. Viscosité dynamique $\mu$

Elle caractérise l'aptitude des couches de fluide à glisser les unes sur les autres (comparable au frottement existant entre les surfaces planes de deux solides en contact).

$$1\text{P}\ell = 1\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$$

### Fluide parfait ou idéal

Un fluide parfait (non visqueux) est un fluide dont la viscosité est supposée nulle ( $\mu = 0$  ou  $\nu = 0$ ). Il n'y a pas de contraintes de cisaillement dues au frottement interne entre molécules et au frottement contre les parois. Il n'y a pas de rotation des particules de fluide autour de leur centre de masse (elles sont dites irrotationnelles). Il ne supporte que des forces de pression et les écoulements peuvent être représentés par des lignes de courant.

### Fluide incompressible

Un fluide est dit incompressible lorsque sa masse volumique  $\rho$  reste constante dans un écoulement, à partir de l'équation de continuité, que la masse volumique est alors nécessairement constante sur chaque trajectoire

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

Les liquides peuvent être considérés comme des fluides incompressibles (eau, huile, etc.).

### 1.2.3 Description Lagrangienne

On se donne les équations paramétriques de la trajectoire (Figure (1.1)) de l'ensemble des points matériels P dans un repère cartésien. Si  $(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  sont les coordonnées initiales du point P considérée à  $(t = 0)$ , on suppose connues les relations  $x_i = x_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t)$  qui donnent la position du point P à l'instant  $t$  qui était initialement en  $P_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ .

$(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  sont les variables indépendantes de Lagrange

Toute grandeur liée à un élément matériel P du continu peut être étudiée en suivant sa trajectoire. Elle est alors fonction de  $(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ .

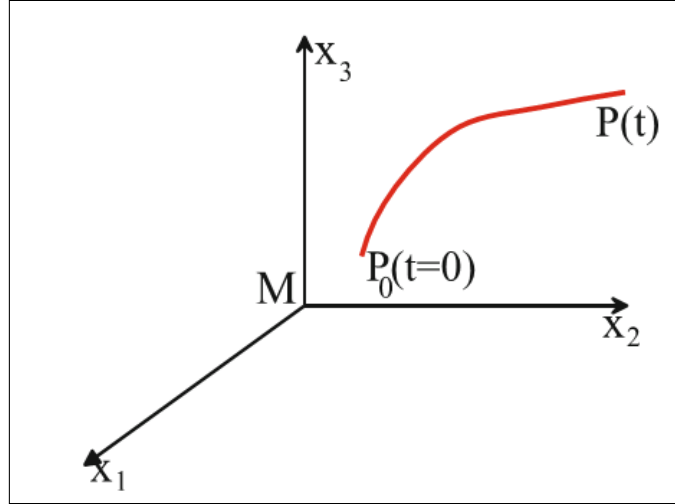


Figure 1.1- Trajectoire d'une particule matérielle dans un repère de coordonnées catésiennes  $(x_1, x_2, x_3)$

$$G = G(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t)$$

C'est le cas de

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t) && \text{position de P.} \\ V_i &= V_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t) = \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial t} && \text{vitesse de P.} \\ \gamma_i &= \gamma_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t) = \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} && \text{accélération de P.} \end{aligned}$$

L'utilisation des variables de Lagrange fait intervenir la position initiale de la particule dans l'état initial du système. C'est la méthode la mieux adaptée à l'étude des "solides" déformables pour lesquels on peut définir un état initial et suivre facilement la transformation.

Dans les milieux fluides l'état initial n'a aucune importance sur les efforts internes à l'état présent. La description de Lagrange est mal adaptée à l'étude du mouvement des fluides.

Les avantages de la représentation lagrangienne sont :

- la trajectoire de chaque particule fluide est connue, son histoire peut être tracée;
- la conservation de la masse est satisfaite.

Les inconvénients de cette représentation sont liés au fait que les fluides sont composés d'un très grand nombre de particules. Les interactions entre les particules sont donc difficiles

à décrire. La méthode lagrangienne n'est donc pas pratique pour des applications réelles mais elle peut être utilisée pour les sprays, la dynamique des bulles et des particules ou les gaz raréfiés par exemple.

### 1.2.4 Description Eulérienne

En un point géométrique donné  $M$ , on se donne les composantes du vecteur vitesse  $V_i = V_i(M, t)$  et toute grandeur physique attachée au fluide  $G(M, t)$ .

Soit dans un système de coordonnées cartésiennes:

$$V_i = V_i(x_1^0, x_2^0, t)$$

$$G = G(x_1^0, x_2^0, t)$$

$(x_1^0, x_2^0, t)$  sont les variables d'Euler.

On ne s'intéresse donc pas ici à l'histoire du continu considéré mais à son champ de vitesse à l'instant  $t$ .

$$\begin{aligned} G &= G(x_1^0, x_2^0, t) = G(x_1(x_1^0, x_2^0, t), x_2(x_1^0, x_2^0, t), t) \\ &= G(x_1^0, x_2^0, t) \end{aligned}$$

**Relation entre description lagrangienne et description eulérienne** La méthode d'Euler permet d'exprimer la vitesse comme:

$$V_i(M, t) = \frac{dx_i}{dt} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = V_1(x_1^0, x_2^0, t) \\ \frac{dx_2}{dt} = V_2(x_1^0, x_2^0, t) \end{cases}$$

Si on intègre le système d'équations ci-dessus, on aboutit à des constantes d'intégration qui doivent être trouvées à partir des conditions initiales. La solution donne alors les équations de Lagrange : on retrouve le système d'équations  $(x_i = x_i(x_1^0, x_2^0, t))$ . En principe la méthode lagrangienne peut donc être déduite de l'approche eulérienne.

### 1.2.5 Trajectoire

Les équations paramétriques des trajectoires sont données par la résolution du système différentiel :

$$V_i = \frac{dx_i}{dt} \rightarrow dx_i = V_i \cdot dt$$

$$\frac{dx_1}{V_1(x_1, x_2, t)} = \frac{dx_2}{V_2(x_1, x_2, t)}$$

L'intégration donne les relations

$$x_i = x_i(x_1^0, x_2^0, t)$$

Où  $x_1^0, x_2^0$  sont des constantes

## 1.3 Notions fondamentales sur les écoulements

L'écoulement des fluides est un phénomène complexe et ne se prête pas toujours à une analyse mathématique rigoureuse.

L'écoulement d'un fluide peut être permanent ou non permanent, uniforme ou non uniforme, laminaire ou turbulent, à une dimension, à deux dimension ou à trois dimension.

Dans notre travail, nous étudions l'écoulement à deux dimension quand les particules du fluide se déplacent dans un plan ou dans des plans parallèles et que la configuration des lignes de courant est la même dans chaque plan.

### 1.3.1 Ecoulement irrotationnel

On rappelle que pour un écoulement irrotationnel :  $\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ . Or d'un point de vue mathématique  $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \varphi) = \vec{0}, \forall \varphi$

On peut donc poser  $\vec{u} = \vec{\nabla} \varphi$ ,  $\varphi$  est appelé potentiel des vitesses.

### 1.3.2 Écoulement incompressible

On vient de voir que pour un écoulement incompressible :  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ . Si on pose  $\vec{u} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ ,  $\forall \vec{A}$  alors  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0$ ,  $\vec{A}$  est appelé potentiel vecteur.

### 1.3.3 Écoulements bidimensionnels d'un fluide incompressible.

Soit un repère cartésien orthonormé  $Oxyz$ . On dit qu'un écoulement est *bidimensionnel* dans le plan  $x - y$  (Figure 1.2) si la composante de la vitesse parallèle à l'axe  $Oz$  est nulle c'est-à-dire :

$$w(x, t) = 0 \quad \forall x, \forall t$$

et si les caractéristiques du fluide (vecteur vitesse, pression, etc.) sont indépendantes de  $z$ .

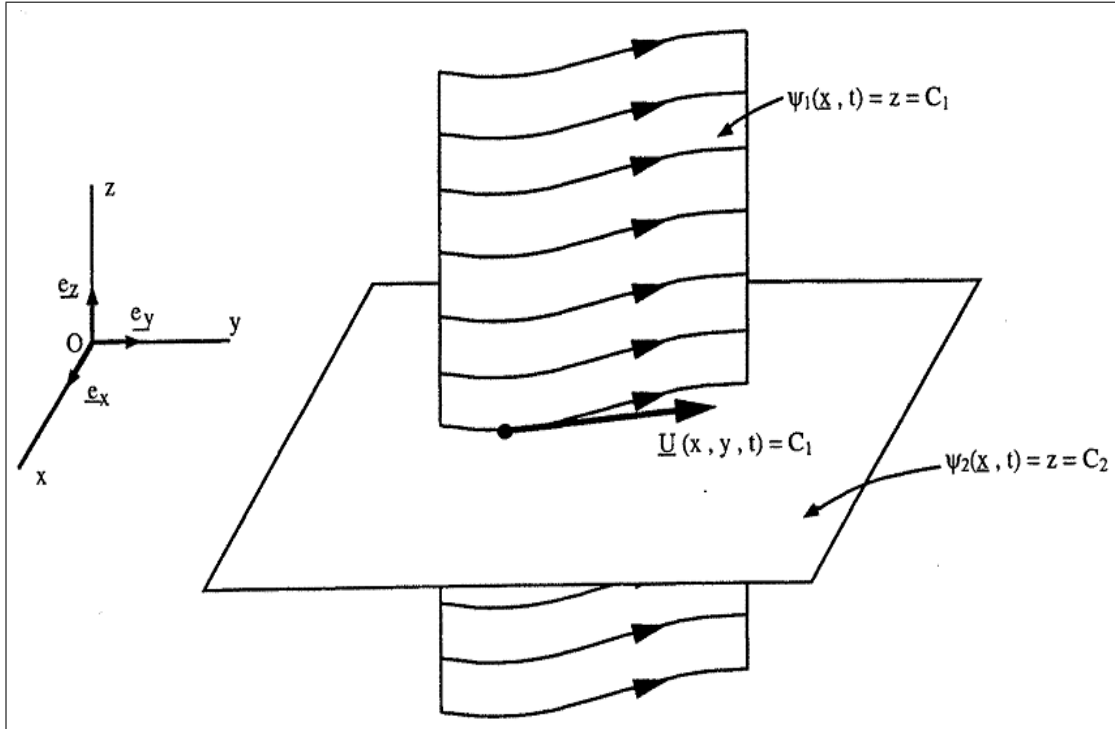


Figure 1.2 - Surfaces de courant et lignes de courant dans un écoulement bidimensionnel

Les lignes de courant sont alors identiques dans tout plan  $z = C_2$ . Il est donc évident qu'une des familles de surfaces de courant précédemment définies est constituée de plans parallèles

$$\psi_2(x, t) = z = C_2$$

### 1.3.4 Ecoulement dans un angle; écoulement autour d'une plaque infinie; écoulement de point d'arrêt.

Ce type de champs élémentaires correspond à la famille de potentiels complexes

$$f(z) = \frac{c}{m+1} z^{m+1}$$

Où  $c$  est une constante réelle et  $m$  un réel supérieur à  $-1$ . On remarque que, pour  $m$  non entier, la fonction  $f(z)$  possède des points de branchement algébriques à l'origine  $z = 0$  et à l'infini. On choisit alors pour coupure l'axe  $Ox$ . En coordonnées polaires, le potentiel et la fonction de courant s'écrivent

$$\varphi = \frac{c}{m+1} r^{m+1} \cos [(m+1) \theta] \quad , \quad \psi = \frac{c}{m+1} r^{m+1} \sin [(m+1) \theta] ;$$

et la vitesse complexe est

$$w(z) = cz^m$$

L'allure générale de quelques écoulements représentatifs de cette famille de potentiels est schématisée sur la figure (1.3). Comme nous l'avons dit plus haut, toute ligne de courant peut a priori être choisie comme paroi solide. On remarque par exemple que le potentiel complexe pour  $m = 1$  décrit aussi bien l'écoulement de point d'arrêt que l'écoulement dans un angle droit. On s'est limité ici au cas de parois planes faisant un angle  $\alpha = \pi/m + 1$ .

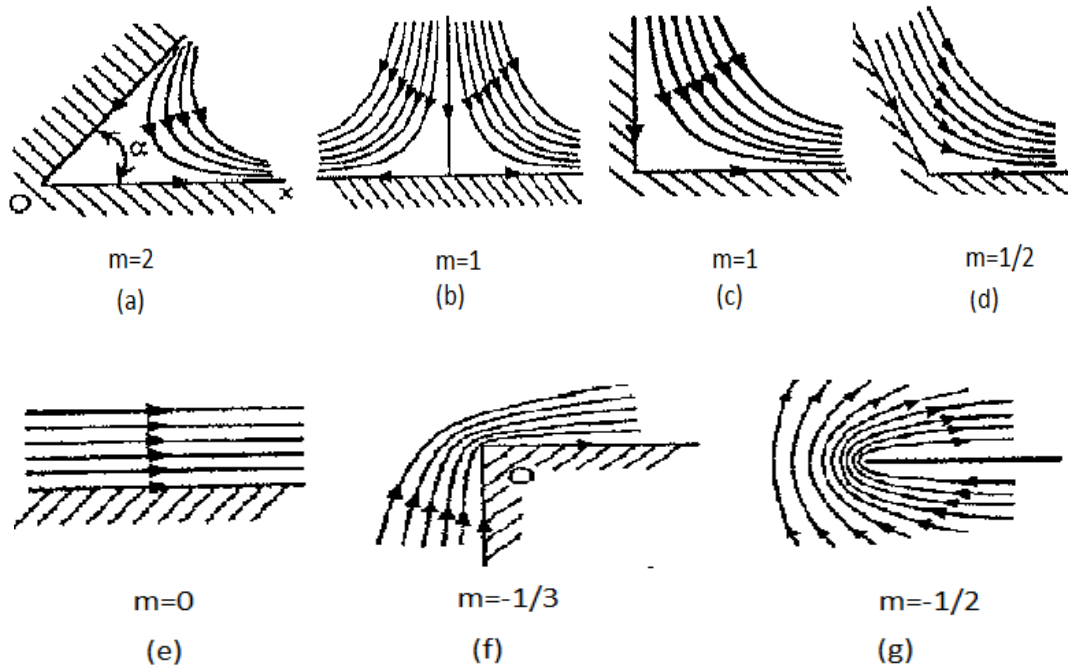


Figure 1.3 - Exemples d'écoulements dans un angle

Lorsque  $m > 0$ , on obtient l'écoulement dans un angle rentrant  $\alpha < \pi$ , et la vitesse est nulle à l'origine. Lorsque  $m < 0$ , l'angle devient saillant et la vitesse est infinie à l'origine.

On peut se demander dans quelle mesure ces écoulements de fluides parfaits constituent des modèles satisfaisants d'écoulements de fluides réels visqueux dans la même configuration géométrique. Pour des angles rentrants ( $m > 0$ ), l'écoulement potentiel extérieur à la couche limite est ralenti le long de la paroi  $\theta = \pi/(m+1)$ , ceci en raison de la divergence des lignes de courant. D'après l'équation de Bernoulli  $p/\rho + U^2/2 = \text{constante}$ , il en résulte une augmentation de la pression le long de la paroi  $\theta = \pi/(m+1)$ . La couche limite, où les vitesses sont plus faibles que celles de l'écoulement potentiel extérieur, est alors soumise à un gradient de pression adverse dans la direction de l'écoulement : elle se détache de la paroi en amont du point O et il y a formation d'un « tourbillon de coin » au voisinage de l'origine. C'est ce qu'on appelle le phénomène de décollement. Lorsque l'angle est saillant ( $m < 0$ ), l'écoulement potentiel extérieur est accéléré en s'approchant de l'origine. Le gradient de pression est alors favorable et il n'y a pas décollement en amont de l'origine. Cependant la présence de l'angle saillant en O conduit à un décollement des lignes de courant en aval de O.



### 1.3.5 Lignes de courant

Les lignes de courant de l'écoulement à l'instant  $t$  sont, par définition, les lignes de force du champ de vitesses  $U(x, t)$ . Si  $dx$  est un élément différentiel tangent à une ligne de courant, on a (Figure 1.4)

$$dx \wedge U(x, t) = 0$$

Dans un repère cartésien, les lignes de courant sont solutions du système

$$\frac{dx_1}{U_1(x, t)} = \frac{dx_2}{U_2(x, t)}$$

Où le temps  $t$  est un paramètre. Les lignes de courant varient en général au cours du temps. Elles constituent à un instant donné un réseau de courbes à deux paramètres.

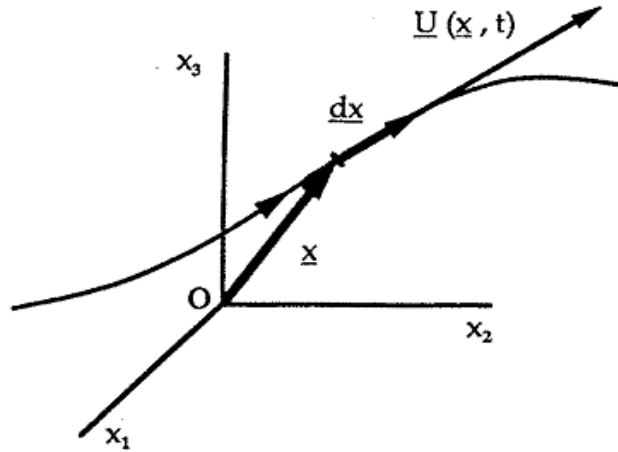


Figure 1.4 - Ligne de courant.

## 1.4 Quelques équation de la mécanique de fluide

### 1.4.1 Equation de continuité

On suppose dans cette section que le volume  $\Omega(t)$  ne contient pas de surfaces de discontinuité. L'application du théorème de transport et de la formule de la divergence conduit alors au résultat :

$$\int_{\Omega(t)} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho U \right) d\Omega(t) = 0 \quad \forall \Omega(t),$$

d'où les formes locales équivalentes de l'équation de continuité

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho U \right) = 0, \quad (1.1)$$

et

$$\left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} U \right) = 0 \quad (1.2)$$

Soit en repère cartésien orthonormé

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho U_i) \right) = 0, \quad (1.3)$$

$$\left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (1.4)$$

**Remarque 1.4.1** La relation (1.2) s'écrit également sous la forme :

$$\operatorname{div} U = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}.$$

### 1.4.2 Equation d' Euler

On suppose ici que les forces de volume sont conservatives et dérivent donc d'un potentiel  $\phi$  tel que

$$F = -\text{grad } \phi \quad (1.5)$$

les équations d'Euler prennent alors une forme plus appropriée pour la suite de l'exposé :

Continuité

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \underline{\mathbf{U}} = 0 \quad (1.6)$$

Loi fondamentale de la dynamique.

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{U}}}{\partial t} + \text{grad} \left( \frac{U^2}{2} + \phi \right) + \omega \wedge \underline{\mathbf{U}} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } P \quad (1.7)$$

Equation de l'énergie interne

$$\rho \frac{de}{dt} = -P \operatorname{div} \underline{\mathbf{U}} \quad (1.8)$$

Equations d'état thermodynamique

$$P = P(\rho, T) \quad (1.9)$$

$$e = e(\rho, T) \quad (1.10)$$

### 1.4.3 Equation de Bernoulli pour un fluide homogène incompressible

#### Conservation du champ H : 1<sup>er</sup> théorème de Bernoulli.

Dans tout écoulement permanent de fluide parfait, en présence de forces de volume conservatives, le champ H est conservé le long d'une ligne de courant : l'écoulement est dit isoénergétique et l'on a l'équation de Bernoulli :

$$H = h + \frac{U^2}{2} + \phi = \text{constante le long d'une ligne de courant} \quad (1.11)$$

#### 2<sup>ème</sup> théorème de Bernoulli

Pour tout écoulement irrotationnel d'un fluide parfait, barotrope, en présence de forces de volume conservatives, l'équation de Bernoulli s'écrit :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \int \frac{dP}{\rho} + \frac{U^2}{2} + \phi = C(t)$$

où la constante  $C(t)$  dépend uniquement du temps  $t$ .

Dans le cas d'un fluide parfait homogène incompressible,  $\text{div}U = 0$ , et l'équation de l'énergie interne (de les équations d'Euler (1.8)) devient  $de/dt = 0$  : l'énergie interne  $e$  est conservée le long des trajectoires. Si l'écoulement est permanent on a donc

$e = \text{constante le long d'une ligne de courant}$

Compte tenu du fait que  $h = e + p/\rho$ , le 1<sup>er</sup> théorème de Bernoulli s'exprime alors sous la forme simplifiée :

$$\frac{P}{\rho} + \frac{U^2}{2} + \phi = \text{constante le long d'une ligne de courant} \quad (1.12)$$

On rappelle que le fluide homogène incompressible constitue un cas particulier de fluide barotrope où  $\rho = \text{constante}$ . Le 2<sup>ème</sup> théorème de Bernoulli devient donc

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{P}{\rho} + \frac{U^2}{2} + \phi = C(t) \quad (1.13)$$

## 1.5 Transformation de Schwarz-Christoffel

La transformation de Schwarz a pour but de représenter l'aire intérieure à une ligne polygonale sur un demi-plan, cette ligne polygonale peut être convexe ou non, mais deux côtés non consécutifs doivent être sans point commun (on peut généraliser la définition à un contour non fermé).

Pour définir cette transformation  $z = h(Z)$  ou  $Z = H(z)$ , la méthode de Schwarz consiste à considérer que  $H(z)$  représente l'expression d'un champ auxiliaire induit dans le domaine  $D$  du plan  $z$  intérieur à la ligne polygonale, par un " doublet " d'ordre  $n$  placé soit sur un des côtés de la ligne, soit, plutôt, en un de ses sommets. On constate alors :

- que, par définition même,  $Z = h(z) = X + iY$  est une fonction holomorphe dans  $D$  et définit bien une transformation conforme.
- que, dans cette transformation, le contour polygonal devient bien une droite du plan  $Z$  puisque les lignes  $Y = \text{constante}$  ne sont rien d'autre que les lignes de courant du champ  $Z = H(z)$ . L'homologue de la ligne de courant que constitue le contour peut toujours être choisie comme ligne  $Y = 0$ .
- que, l'aire intérieure au contour devient le demi-plan supérieur du plan  $Z$ .
- que, l'homologue du sommet du doublet est le point à l'infini du plan  $Z$ .

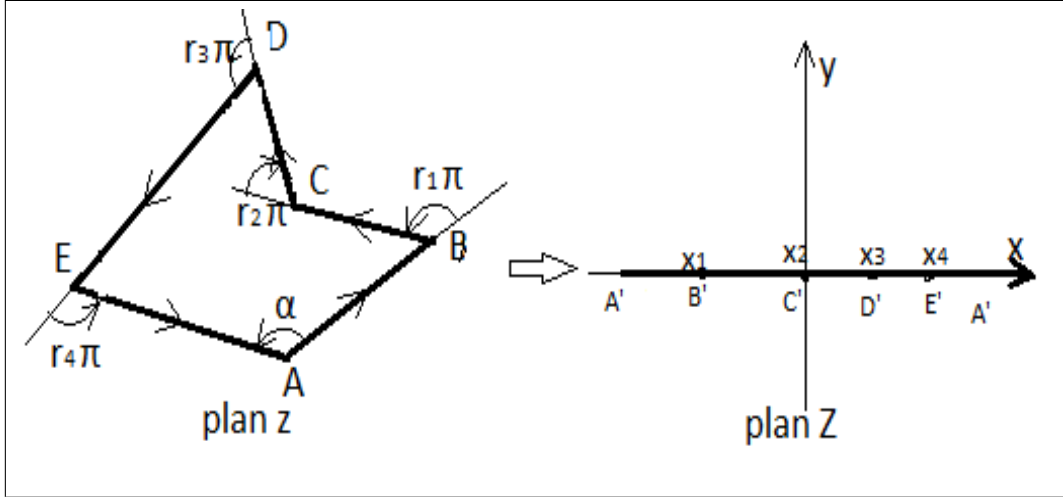


Figure 1.5 - Le contour polygonal A B C D E du plan  $z$ , étant une ligne de courant, devient la droite  $y = 0$  du plan  $Z$

Les calculs, assez longs, permettent d'obtenir l'expression suivante de la transformation :

$$\frac{dz}{dZ} = k \prod_i (Z - X_i)^{r_i}$$

Où les notations suivantes sont utilisées :

$k$  : constante arbitraire ;

$X_i$  : coordonnées des points du plan  $Z$  homologues des sommets  $z_i$  de la ligne polygonale (ce sont les valeurs du potentiel  $X$  du champ  $Z = H(z)$  aux points  $z_i$ ).

$r_i$  : exposants définis par les angles du contour, tel que  $r_i = \frac{\alpha_i}{\pi} - 1$ .

Dans cette transformation on peut toujours :

- choisir l'origine du plan  $Z$  en un des points  $X_i$  homologues des  $z_i$  ;
- choisir l'intensité du "doublet" d'ordre  $n$ , c'est-à-dire s'imposer la constante  $k$ , ou encore, la coordonnée  $X_i$  (c'est-à-dire le potentiel) de l'un des autres points ;
- choisir le sommet où on place le doublet (point à l'infini de plan  $Z$ ).

Les autres constantes sont ensuite déterminées au moyen des longueurs géométriques des côtés du contour dans le plan  $z$  après retour à ce plan.

La transformation étant ainsi définie, on détermine le champ réel cherché dans le plan  $Z$ , soit  $f(Z)$  et on revient ensuite au plan  $z$ .

## 1.6 Fonctions analytiques (ou holomorphes)

Etant données deux fonctions réelles  $P(x, y)$  et  $Q(x, y)$  des variables réelles  $x$  et  $y$ , considérons la fonction complexe

$$Z = P(x, y) + iQ(x, y) \quad (1.14)$$

Dont les parties réelle et imaginaire sont respectivement  $X = P(x, y)$ ,  $Y = Q(x, y)$ . L'expression (1.14) établit une correspondance entre les points  $m$  du plan  $(x, y)$  et les points  $M$  du plan  $(X, Y)$ . Il s'agit de déterminer sous quelles conditions la dérivée de la fonction complexe (1.14) est définie en un point  $m$  correspondant au nombre complexe  $z = x + iy$ .

Par analogie avec les fonctions réelles de variables réelles, on cherche à évaluer la limite du rapport  $\Delta Z / \Delta z$  lorsque  $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$  tend vers zéro. Il vient

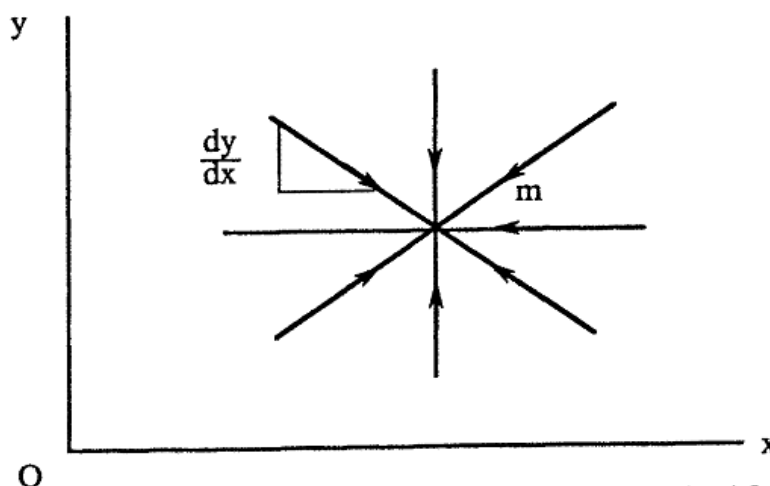


Figure 1.6 - Nature directionnelle de la dérivée de  $Z = P(x, y) + iQ(x, y)$

$$\frac{\Delta Z}{\Delta z} = \frac{P(x + \Delta x, y + \Delta y) + iQ(x + \Delta x, y + \Delta y) - P(x, y) - iQ(x, y)}{\Delta x + i\Delta y} \quad (1.15)$$

soit

$$\frac{\Delta Z}{\Delta z} = \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + o(1) \quad (1.16)$$

Où le symbole  $o(1)$  désigne un terme qui tend vers zéro en même temps que  $\Delta z$ . Après passage à la limite, on obtient

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} + \left(\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}}{1 + i\frac{dy}{dx}} \quad (1.17)$$

En général, la dérivée est donc directionnelle (Figure 1.6) : elle dépend de la direction  $dy/dx$  retenue pour atteindre le point  $m$ .

**Définition 1.6.1** La fonction  $Z = f(z)$  est **holomorphe** en  $z = x + iy$  si elle possède une dérivée

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (1.18)$$

indépendante de la direction  $dy/dx$  choisie pour approcher le point  $z$ .

D'après (1.17), il en sera ainsi lorsque

$$\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = -i\left(\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}\right) \quad (1.19)$$

et l'on peut démontrer que ces relations sont suffisantes pour assurer l'existence de la dérivée, d'où le résultat suivant.

Si une fonction  $f(z)$  est holomorphe dans un domaine, les parties réelle et imaginaire  $P(x, y)$  et  $Q(x, y)$  sont des fonctions harmoniques conjuguées, c'est-à-dire qu'elles vérifient les conditions de Cauchy-Riemann et l'équation de Laplace dans le domaine :

$$\Delta P = 0, \Delta Q = 0$$



Si une fonction  $f(z)$  est holomorphe dans un domaine, les courbes  $P(x, y) = \text{constante}$  et  $Q(x, y) = \text{constante}$  forment un réseau orthogonal dans ce domaine.

En effet les normales de chaque famille de courbes sont orthogonales en tout point :

$$\text{grad } P \cdot \text{grad } Q = 0$$

par application des conditions de Cauchy-Riemann .

**Théorème 1.6.1** *Une fonction  $f(z)$  est dite analytique dans un domaine si, en tout point de ce domaine, on peut la développer en série entière :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (1.20)$$

Le théorème précédent permet immédiatement de conclure que toute fonction holomorphe est analytique donc infiniment différentiable. Réciproquement, on démontre que toute fonction analytique est holomorphe, la dérivée  $f'(z)$  s'obtenant par dérivation de (1.20) terme à terme. Nous avons choisi dans cette annexe de privilégier la notion de fonction holomorphe.

Les mathématiciens appliqués de langue anglaise ne font souvent pas la distinction entre ces deux concepts et utilisent seulement le terme «analytique».

## 1.7 Potentiel complexe, Vitesse complexe

Un grand nombre d'écoulements plans classiques peuvent être représentés par des fonctions complexes. Soit  $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  où  $z = x + iy$  est la variable complexe associée à la fonction potentiel complexe  $f(z)$  ( $\varphi$  et  $\psi$  représentent respectivement les fonctions potentielle et de courant).

Pour que  $f(z)$  soit analytique, il faut que  $\varphi$  et  $\psi$  vérifient les relations de Cauchy-Riemann. La fonction  $f(z)$  est appelée potentiel complexe des vitesses.

On rappelle que les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  sont des fonctions harmoniques : elles sont toutes deux solutions de l'équation de Laplace ( $\Delta\varphi = 0$ ,  $\Delta\psi = 0$ ).

De plus, le potentiel  $\varphi$  et la fonction de courant  $\psi$  vérifient les conditions de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1.21)$$

La vitesse complexe est définie par :

$$w(z) = \frac{df}{dz} = \frac{\partial}{\partial z} (\varphi + i\psi) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{i}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)$$

Alors

$$w(z) = u - iv. \quad (1.22)$$

# Chapitre 2

## Solution analytique du problème bidimensionnel

**Résumé :** Dans ce chapitre, On considère un problème d'écoulement bidimensionnel à surface libre, avec les effets de la gravité et de la tension de surface sont négligeables.

Donc on utilise la méthode de l'hodographe basée sur la technique de Schawrz-Christoffel pour obtenir la solution exacte.

### 2.1 Méthode de l'hodographe

Cette transformation est utilisée par Kirchhoff 1986 pour trouver la solution exacte de problèmes d'écoulements potentiels et bidimensionnels, partiellement bornée par les parois rigides et rectilignes et d'autres parties par lignes de courant libres, sur les quelles la pression est supposée constante. L'idée de base de cette transformation est l'introduction de la variable complexe définie par :

$$\omega = \log \left( U \frac{dz}{df} \right) = \log \left( \frac{U}{u - iv} \right) = \log \left( \frac{U}{q} \right) + i\theta$$

Où  $z = x + iy$ ,  $f = \varphi + i\psi$ ,  $\frac{df}{dz} = u - iv$  et  $q = \sqrt{u^2 + v^2}$ , avec  $u$  et  $v$  sont les composantes du vecteur vitesse  $V$ ,  $\theta$  est l'angle que forme le vecteur vitesse avec l'horizontale.

On remarque que La fonction  $\omega$  possède de simples propriétés suivantes :

- La partie réelle de  $\omega$  est constante sur chaque ligne de courant libre, i.e,  
 $\log \left( \frac{U}{q} \right) = \text{const.}$
- La partie imaginaire de  $\omega$  est constante sur chaque paroi rigide rectiligne, i.e,  
 $\theta = \text{const.}$

Par conséquent, l'écoulement est représenté par une figure plane de cotés rectilignes (polygone). C'est aussi le cas de la transformation  $f$ , qui transforme le plan physique  $z$  en polygone. Il est évident que, si nous pouvons transformer le plan  $\omega$  vers la moitié supérieure ( resp. inférieure ) d'un autre plan d'une certaine variable complexe, alors la relation entre  $z$  et  $f$  ou entre  $df/dz$  et  $f$  est paramétriquement déterminées.

## 2.2 Position de problème

On se propose dans ce chapitre le problème d'écoulement issue d'un orifice d'un reservoir. Cet écoulement délimité par les parois rigides AB, BC, EF et la surface libre CD.

Le but du problème consiste à déterminer la fonction potentielle de vitesse  $\varphi(x, y)$  qui vérifie les conditions suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\varphi = 0 \text{ dans le domaine de l'écoulement;} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{sur la paroi BC} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 ; \quad \text{sur les parois AB, EF} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 + \frac{p}{\rho} = \text{const} \quad \text{sur la surface libre CD de forme inconnue.} \end{array} \right.$$

Où  $p$  et  $\rho$  sont la pression et la densité du fluide respectivement.

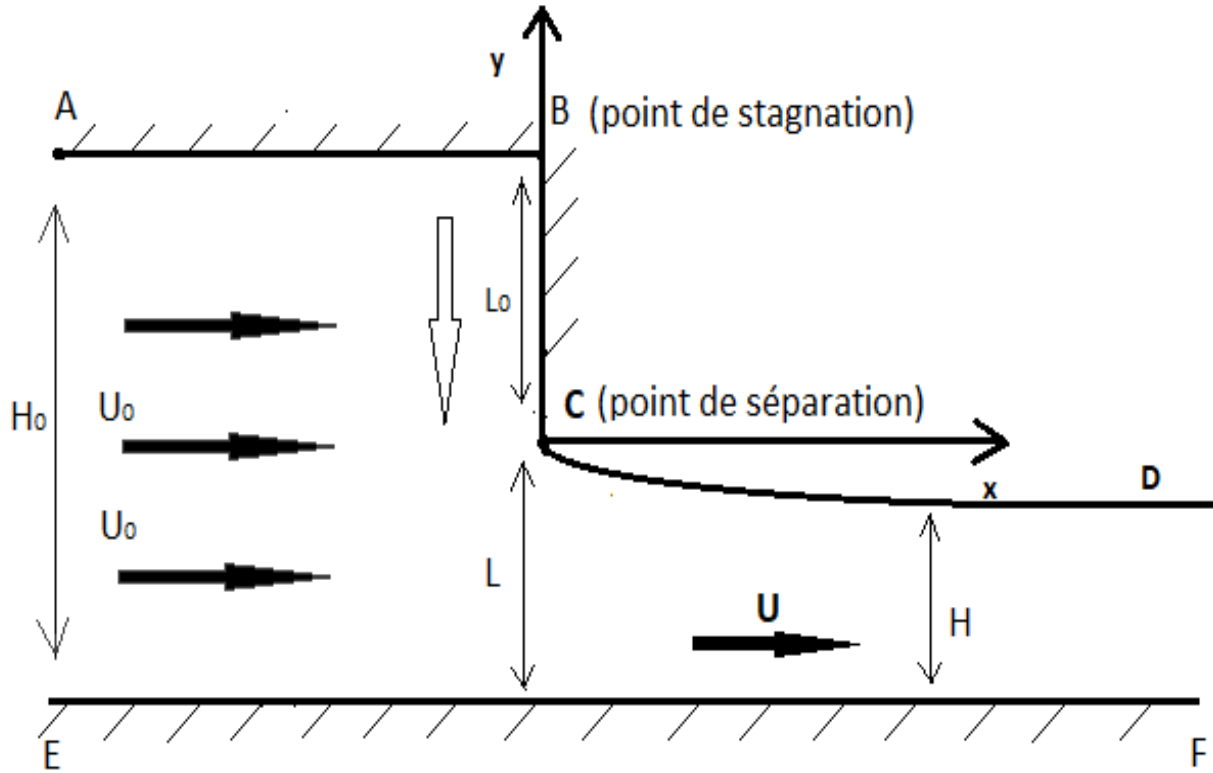


Figure 2.1- Schéma d'un écoulement et positionnement des coordonnées

On peut choisir  $\psi$  comme une fonction différentiable de telle sorte que :

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (2.1)$$

La fonction  $\psi$  est connue comme une fonction de courant, alors le problème maintenant a une variable dépendante au lieu de deux  $u$  et  $v$ . La fonction de courant a une propriété qu'il soit égal à une constante sur toutes lignes de courant. En particulier  $\psi$  est constante le long de surface libre.

Lorsque l'écoulement irrotationnel on a aussi la relation suivante :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{U} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (2.2)$$

Cette équation peut être satisfaite comme suite :

$$U = u(x, y)i + v(x, y)j = \text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}i + \frac{\partial \varphi}{\partial y}j, \quad (2.3)$$

Où  $\varphi$  est la fonction potentielle.

D'après (2.1) et (2.3) on peut trouver une relation entre la fonction potentielle et la fonction de courant :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.4)$$

La relation (2.4) est la même forme comme l'équation de Cauchy-Riemann de théorème des fonctions des variables complexes.

Cela implique que la fonction  $f$  où :

$$f = \varphi + i\psi, \quad (2.5)$$

est une fonction analytique de  $z = x + iy$ . La fonction est connue comme un potentiel complexe.

Le problème d'écoulement issu d'un orifice d'un réservoir comme un autre problème de surface libre, souvent géométries compliquées dans le plan cartésien  $(x, y)$ . Maintenant on va voir la simplification du problème considéré dans un plan  $(\varphi, \psi)$ . cela signifie que  $\varphi$  et  $\psi$  sont utilisés comme variables indépendantes au lieu  $x$  et  $y$ .

Le tableau suivant représente la positionnement des points dans le plan  $z$  et le plan  $f$

Les points	plan- $z$	plan $f$
A	$x = -\infty, y = L_0$	$\psi = 0, \varphi = \varphi_A = -\infty$
B	$x = 0, y = L_0$	$\psi = 0, \varphi = \varphi_B < 0$
C	$x = 0, y = 0$	$\psi = 0, \varphi = \varphi_C = 0$
D	$x = \infty, y < 0$	$\psi = 0, \varphi = \varphi_D = \infty$
E	$x = -\infty, y = L$	$\psi = -1, \varphi = \varphi_E = -\infty$
F	$x = \infty, y = L$	$\psi = -1, \varphi = \varphi_F = \infty$

$\varphi$  et  $\psi$  sont définis à une constante additive arbitraire, il est possible de choisir  $\varphi = 0$  en point de séparation C, et  $\psi = 0$  le long de ligne de courant ABCD. Ensuite, à partir du choix des variables sans dimension, que  $\psi = -1$  sur le bas EF. Alors le fluide est dans un région,  $-1 < \psi < 0$  et  $-\infty < \varphi < \infty$ .

Puisque  $f = \varphi + i\psi$  est une fonction analytique de  $z = x + iy$ , la transformation entre le plan cartésien  $(x, y)$  et le plan potentiel complexe  $(\varphi, \psi)$  est conforme.

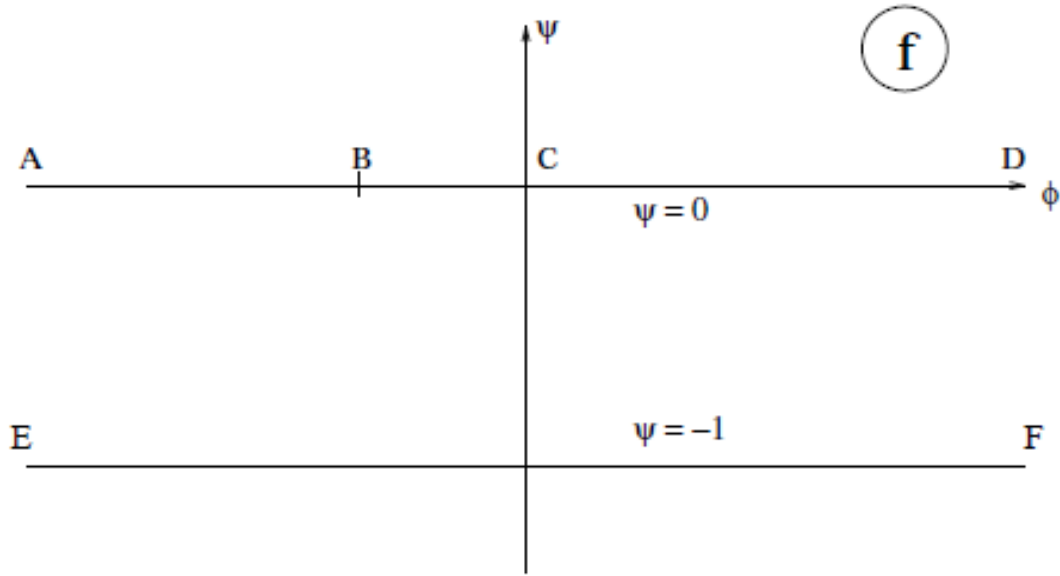


Figure 2.2 - Schéma d'un écoulement dans un plan complexe  $f$

Les conditions limites cinématiques dans le plan  $f$  sont

$$v = 0 \quad \text{sur} \quad \psi = -1,$$

$$v = 0 \quad \text{sur} \quad \psi = 0, \quad \varphi < \varphi_B,$$

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \psi = 0 \quad \varphi_B < \varphi < 0.$$

## 2.3 Résolution du problème

Dans cette section nous allons utiliser la méthode de l'hodographe basée sur la technique de Schawrz-Christoffel pour trouver la solution exacte de notre problème. Pour résoudre ce problème, nous utilisons la méthode de la théorie courant libre introduit par Kirchhoff, basée sur la transformation d'hodographe. la transformation complexe est définie par :

$$\omega = \log \left( U \frac{dz}{df} \right) = \log \left( \frac{U}{u - iv} \right) = \log \left( \frac{U}{q} \right) + i\theta$$

Ou  $z = x + iy$ ,  $q$  et  $\theta$  sont le module de la vitesse et l'angle entre le vecteur vitesse et l'axe horizontale, respectivement. Par cette dernière transformation, le champ occupé par le fluide dans le plan- $z$  est transformé en bande semi-infinie dans le plan- $\omega$ .



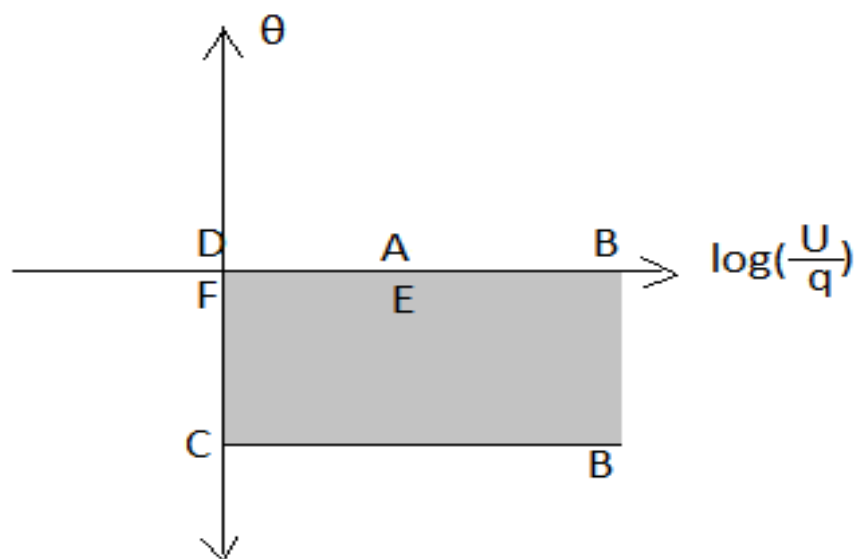


Figure 2.3 - plan- $\omega$

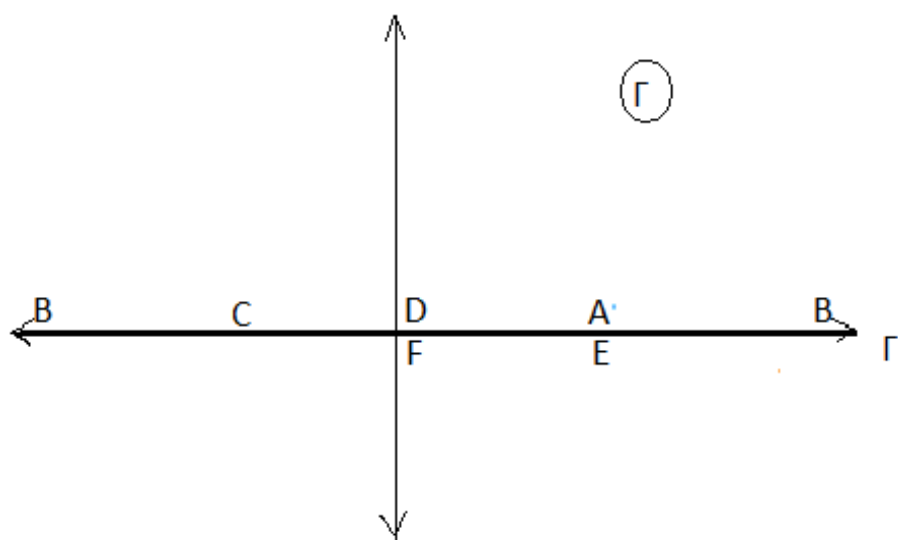


Figure 2.4 - plan - $\Gamma$

La transformation conforme d'une bande semi-infinie dans le plan  $\omega$  (figure 2.3) à en demi-plan (plan  $\Gamma$ ), est donnée par le théorème de Schwarz-Christoffel, en respectant le sens et l'orientation de l'écoulement (voir Figure 2.4).

- On va chercher une relation entre  $\omega$  et  $\Gamma$  :

On applique la transformation Schwarz-christoffel :

$$\frac{d\omega}{d\Gamma} = k (\Gamma - \Gamma_1)^{p_1} (\Gamma - \Gamma_2)^{p_2} (\Gamma - \Gamma_3)^{p_3} \dots (\Gamma - \Gamma_n)^{p_n} \quad \text{et} \quad p_n = \frac{\alpha_n}{\pi} - 1 \quad (2.6)$$

On utilise les points  $(C(-1, 0), D(0, 0))$  dans le plan  $\Gamma$  et  $(C(0, -i\frac{\pi}{2}), D(0, 0))$  dans le plan  $\omega$

$$p_C = \frac{\frac{\pi}{2}}{\pi} - 1 = -\frac{1}{2} \quad \text{alors} \quad p_C = -\frac{1}{2}$$

$$p_D = \frac{\frac{\pi}{2}}{\pi} - 1 = -\frac{1}{2} \quad \text{alors} \quad p_D = -\frac{1}{2}$$

On substitue ces données dans l'équation (2.6) on trouve

$$\frac{d\omega}{d\Gamma} = k (\Gamma - 0)^{-1/2} (\Gamma + 1)^{-1/2}$$

Alors :

$$\frac{d\omega}{d\Gamma} = \frac{k}{\sqrt{\Gamma}\sqrt{\Gamma+1}}$$

$$\Rightarrow d\omega = k \int \frac{d\Gamma}{\sqrt{\Gamma}\sqrt{\Gamma+1}}$$

$$\Rightarrow \omega = 2k \sinh^{-1}(\sqrt{\Gamma}) + N$$

$$\omega = 2k \ln(\sqrt{\Gamma} + \sqrt{\Gamma+1}) + N$$

Alors :

$$\omega = 2k \ln(\sqrt{\Gamma} + \sqrt{\Gamma + 1}) + N \quad (2.7)$$

Ensuite on va déterminer les valeurs  $k$  et  $N$

On remplace le point C  $\left(\Gamma = -1, \omega = -i\frac{\pi}{2}\right)$  dans l'équation (2.7) on trouve

$$-i\frac{\pi}{2} = 2k \ln(\sqrt{-1} + \sqrt{-1 + 1}) + N$$

$$\implies -i\frac{\pi}{2} = 2k \ln(\sqrt{i^2}) + N$$

$$\implies -\frac{\pi}{2} = 2k \ln(i) + N$$

On a

$$\log(z) = \ln |z| + i \arg(z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i a \tan 2(y, x)$$

Alors

$$\ln(i) = i\frac{\pi}{2}$$

$$\implies -\frac{i\pi}{2} = 2k\frac{i\pi}{2} + N \quad (2.8)$$

La détermination de valeur  $k$

On remplace le point D  $(\Gamma = 0, \omega = 0)$  dans l'équation (2.7) on trouve

$$0 = 2k \ln(\sqrt{0} + \sqrt{0 + 1}) + N$$

$$\implies N = 0 \quad (2.9)$$

D'après (2.8) et (2.9) on trouve

$$k = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad N = 0$$

Donc

$$\omega = 2\left(-\frac{1}{2}\right) \ln(\sqrt{\Gamma} + \sqrt{\Gamma + 1})$$

$$\implies \omega = -\ln(\sqrt{\Gamma} + \sqrt{\Gamma + 1}) \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}
 &\Longleftrightarrow e^\omega = \frac{1}{\sqrt{\Gamma} + \sqrt{\Gamma+1}} \\
 \Rightarrow e^\omega &= \frac{\sqrt{\Gamma} - \sqrt{\Gamma+1}}{(\sqrt{\Gamma} + \sqrt{\Gamma+1})(\sqrt{\Gamma} - \sqrt{\Gamma+1})} \\
 \Rightarrow e^\omega &= \sqrt{\Gamma} - \sqrt{\Gamma+1} \\
 \Rightarrow e^\omega - \sqrt{\Gamma} &= -\sqrt{\Gamma+1} \\
 \Rightarrow \sqrt{\Gamma} - e^\omega &= \sqrt{\Gamma+1} \\
 \Rightarrow (\sqrt{\Gamma} - e^\omega)^2 &= (\sqrt{\Gamma+1})^2 \\
 \Rightarrow \Gamma + e^{2\omega} - 2\sqrt{\Gamma}e^\omega &= \Gamma + 1 \\
 \Rightarrow -2\sqrt{\Gamma}e^\omega &= 1 - e^{2\omega} \\
 \Rightarrow \sqrt{\Gamma} &= -\frac{1 - e^{2\omega}}{2e^\omega} \\
 \Rightarrow \sqrt{\Gamma} &= \sinh(\omega)
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Donc

$$\boxed{\Gamma = \sinh^2 \omega} \tag{2.12}$$

- On va chercher la dépendance entre  $f$  et  $\Gamma$

On utilise la transformation christoffel-schwarz :

$$\frac{df}{d\Gamma} = M (\Gamma - \Gamma_1)^{p_1} (\Gamma - \Gamma_2)^{p_2} (\Gamma - \Gamma_3)^{p_3} \dots (\Gamma - \Gamma_n)^{p_n} \quad \text{et } p_n = \frac{\alpha_n}{\pi} - 1$$

Alors

$$\frac{df}{d\Gamma} = M(\Gamma - 0)^{-1} (\Gamma - 1)^{-1} (\Gamma + 1)^0 = M \frac{1}{\Gamma(\Gamma - 1)}$$

En intégre cette équation, on trouve :

$$\int df = M \int \frac{1}{\Gamma(\Gamma - 1)}$$

$$f = M \ln((\Gamma - 1) - \ln(\Gamma)) + S$$

$$\Rightarrow f = M \ln \left( \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} \right) + S \quad (2.13)$$

On va déterminer les valeurs  $M$  et  $S$

On choisit le point  $B(\Gamma = \infty, f = -1)$  et on substitue dans (2.13) on trouve :

$$-1 = M \ln \left( \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} \right) + S$$

$$\text{On a : } \lim_{\Gamma \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{1 - \frac{1}{\Gamma}}{1} \right) = 0 \text{ lorsque } \Gamma \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow S = -1$$

Alors l'équation devient :

$$f = M \ln \left( \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} \right) - 1 \quad (2.14)$$

Pour déterminer  $M$ , on choisit le point  $C(\Gamma = -1, f = 0)$  et on substitue dans (2.14) on trouve :

$$0 = M \ln \left( \frac{-1-1}{-1} \right) - 1$$

$$0 = M \ln(2) - 1$$

$$\implies 1 = M \ln 2$$

$$\implies M = \frac{1}{\ln 2}$$

L'équation devient :

$$f = \frac{1}{\ln 2} \ln \left( \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} \right) - 1 \quad (2.15)$$

L'équation (2.15)

$$\iff (f + 1) \ln 2 = \ln \left( \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} \right)$$

$$\implies e^{(f+1) \ln 2} = \frac{\Gamma - 1}{\Gamma}$$

On prend  $Y = (f + 1) \ln 2$

$$\implies e^Y = \frac{\Gamma - 1}{\Gamma}$$

$$\implies \Gamma e^Y = \Gamma - 1$$

$$\implies \Gamma e^Y - \Gamma + 1 = 0$$

$$\implies \Gamma(e^Y - 1) + 1 = 0$$

$$\implies \Gamma = -\frac{1}{e^Y - 1}$$

Alors

$$\boxed{\Gamma = -\frac{1}{e^{(f+1) \ln 2} - 1}} \quad (2.16)$$

- On va chercher la relation entre  $z$  et  $\Gamma$

On utilise la fonction de kirchoff :

$$\omega = \log \left( U \frac{dz}{df} \right) \quad (2.17)$$

$$\implies e^\omega = U \frac{dz}{df} \quad (2.18)$$

Alors

$$\frac{dz}{df} = \frac{1}{U} e^\omega \quad (2.19)$$

On a

$$\frac{df}{d\Gamma} = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{1}{\Gamma(\Gamma-1)} \quad (2.20)$$

$$\frac{dz}{d\Gamma} = \frac{dz}{df} \cdot \frac{df}{d\Gamma} \quad (2.21)$$

$$\frac{dz}{d\Gamma} = \frac{1}{U} e^\omega \cdot \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{1}{\Gamma(\Gamma-1)} \quad (2.22)$$

$$\frac{dz}{d\Gamma} = \frac{e^\omega}{U \ln(2)} \cdot \frac{1}{\Gamma(\Gamma-1)} \quad (2.23)$$

On utilise la relation (2.11)

$$e^\omega = \sqrt{\Gamma} - \sqrt{\Gamma+1}$$

$$\frac{dz}{d\Gamma} = \frac{1}{U \ln(2)} \cdot \frac{1}{\Gamma(\Gamma-1)} \left( \sqrt{\Gamma} - \sqrt{\Gamma+1} \right) \quad (2.24)$$

$$\frac{dz}{d\Gamma} = \frac{1}{U \ln(2)} \cdot \frac{1}{\Gamma(\Gamma-1)} \left( \sqrt{\Gamma} - \sqrt{(\Gamma+1)} \right)$$

$$\implies \frac{dz}{d\Gamma} = \frac{1}{U \ln(2)} \left[ \frac{\sqrt{\Gamma}}{\Gamma(\Gamma-1)} - \frac{\sqrt{(\Gamma+1)}}{\Gamma(\Gamma-1)} \right]$$

$$\implies \frac{dz}{d\Gamma} = \frac{1}{U \ln(2)} \left[ \frac{1}{\sqrt{\Gamma}(\Gamma-1)} - \frac{\sqrt{(\Gamma+1)}}{\Gamma(\Gamma-1)} \right]$$

$$\Rightarrow dz = \frac{1}{U \ln(2)} \left[ \frac{1}{\sqrt{\Gamma}(\Gamma - 1)} - \frac{\sqrt{\Gamma + 1}}{\Gamma(\Gamma - 1)} \right] d\Gamma \quad (2.25)$$

Alors

$$\int dz = \frac{1}{U \ln(2)} \left[ \int \frac{d\Gamma}{\sqrt{\Gamma}(\Gamma - 1)} - \int \frac{\sqrt{\Gamma + 1}}{\Gamma(\Gamma - 1)} d\Gamma \right] \quad (2.26)$$

On pose :

$$I_1 = \int \frac{d\Gamma}{\sqrt{\Gamma}(\Gamma - 1)} \quad (2.27)$$

On utilise le changement de variable

$$\text{On pose : } \Gamma = t^2 \Rightarrow d\Gamma = 2t dt \quad \text{et} \quad \sqrt{\Gamma} = t$$

alors

$$I_1 = \int \frac{2dt}{(t^2 - 1)} = \int \frac{dt}{(t - 1)} - \int \frac{dt}{(t + 1)} = [\ln(t - 1) - \ln(t + 1)]$$

Donc

$$\Rightarrow I_1 = \ln \left( \frac{\sqrt{\Gamma} - 1}{\sqrt{\Gamma} + 1} \right) \quad (2.28)$$

On pose

$$I_2 = \int \frac{\sqrt{\Gamma + 1}}{\Gamma(\Gamma - 1)} d\Gamma \quad (2.29)$$

Après l'intégration, on trouve :

$$I_2 = \sqrt{2} \ln \left( \sqrt{\Gamma + 1} - \sqrt{2} \right) - \sqrt{2} \ln \left( \sqrt{\Gamma + 1} + \sqrt{2} \right) - \ln \left( \sqrt{\Gamma + 1} - 1 \right) + \ln \left( \sqrt{\Gamma + 1} + 1 \right) \quad (2.30)$$

Donc l'équation (2.26) devient :

$$z - z_0 = \frac{1}{U \ln(2)} \left[ \ln \left( \frac{\sqrt{\Gamma} - 1}{\sqrt{\Gamma} + 1} \right) - \sqrt{2} \ln \left( \frac{\sqrt{\Gamma + 1} - \sqrt{2}}{\sqrt{\Gamma + 1} + \sqrt{2}} \right) - \ln \left( \frac{\sqrt{\Gamma + 1} - 1}{\sqrt{\Gamma + 1} + 1} \right) \right]$$



$$\Rightarrow x+iy-x_0-iy_0 = \frac{1}{U \ln(2)} \left[ \ln \left( \frac{\sqrt{\Gamma}-1}{\sqrt{\Gamma}+1} \right) - \sqrt{2} \ln \left( \frac{\sqrt{\Gamma+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{\Gamma+1}+\sqrt{2}} \right) - \ln \left( \frac{\sqrt{\Gamma+1}-1}{\sqrt{\Gamma+1}+1} \right) \right]$$

$$\Rightarrow x-x_0+i(y-y_0) = \frac{1}{U \ln(2)} \left[ \ln \left( \frac{\sqrt{\Gamma}-1}{\sqrt{\Gamma}+1} \right) - \sqrt{2} \ln \left( \frac{\sqrt{\Gamma+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{\Gamma+1}+\sqrt{2}} \right) - \ln \left( \frac{\sqrt{\Gamma+1}-1}{\sqrt{\Gamma+1}+1} \right) \right]$$

On choisit le point C( $z_C = 0$  et  $\Gamma = -1$ ), on trouve :

$$\Rightarrow -x_0 - iy_0 = \frac{1}{U \ln(2)} \left[ \ln \left( \frac{i-1}{i+1} \right) - \sqrt{2} \ln(-1) - \ln(-1) \right]$$

$$\Rightarrow -x_0 - iy_0 = \frac{1}{U \ln(2)} \left[ i\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}i\pi - i\pi \right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = \frac{\pi(1+2\sqrt{2})}{U2\ln(2)} \end{cases}$$

Donc

$$\boxed{\begin{cases} x = \frac{1}{U \ln(2)} \left[ \ln \left( \frac{\sqrt{\Gamma}-1}{\sqrt{\Gamma}+1} \right) - \sqrt{2} \ln \left( \frac{\sqrt{\Gamma+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{\Gamma+1}+\sqrt{2}} \right) - \ln \left( \frac{\sqrt{\Gamma+1}-1}{\sqrt{\Gamma+1}+1} \right) \right] \\ y = -\frac{\pi(1+2\sqrt{2})}{U2\ln(2)} \end{cases}}$$

qui est l'équation paramétrique de la surface libre.

# Chapitre 3

## Résolution numérique du problème bidimensionnel

**Résumé :** Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution numérique du problème considéré, en tenant compte des forces de la tension de surface et on garde la gravité  $g$  est nulle, en utilisant la technique utilisée par Vanden-Broeck et Keller. Dans ce cas, La solution exacte est difficile à trouver explicitement et même impossible.

### 3.1 Formulation générale du problème

Nous considérons un écoulement potentiel, bidimensionnel et irrotationnel d'un fluide incompressible et non visqueux dans un réservoir de largeur  $H_0$  et de longueur infinie. L'ouverture du réservoir est de largeur  $L$  (voir figure 3.1). Dans l'absence de gravité et de la symétrie de l'écoulement, la ligne de symétrie  $EF$  est considérée comme ligne de courant. On prend axes de coordonnées  $x'ox$  l'origine en  $C$  et la paroi  $BC$  sur l'axe des ordonnées  $y$ . Lorsque  $x \rightarrow \infty$ , la vitesse de l'écoulement s'approche de la vitesse uniforme. Nous supposons que le jet à l'infini est uniforme de vitesse constante  $U$  et de largeur  $H$ .

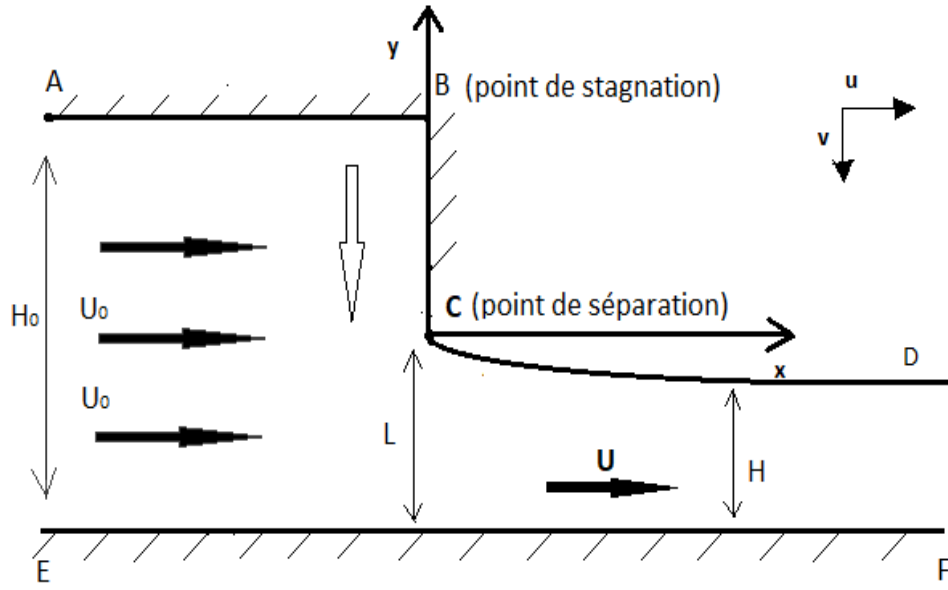


Figure 3.1 - Schéma de l'écoulement et des coordonnées.

Nous définissons des variables sans dimension en prenant  $U$  comme vitesse unitaire et  $H$  comme la longueur de l'unité. On introduit la fonction potentielle  $\varphi$  et la fonction de courant  $\psi$ . Sans perte de généralité, nous choisissons  $\varphi = 0$  au point de raccordement  $(x, y) = (0, 1)$  et  $\psi = 0$  sur la ligne de courant ABCD. D'après la loi de conservation de la masse il s'ensuit que  $\psi = -1$  sur la ligne de courant EF. Pour utiliser les techniques de cartographie, on considère l'écoulement dans le plan complexe  $z = x + iy$  et la fonction de potentiel complexe  $f = \varphi + i\psi$ . On transforme le domaine occupé par le fluide dans le plan  $z$  par la fonction de potentiel  $f$  en bande semi-infinie  $(-\infty < \varphi < \infty, -1 < \psi < 0)$ . (Figure 3.2).

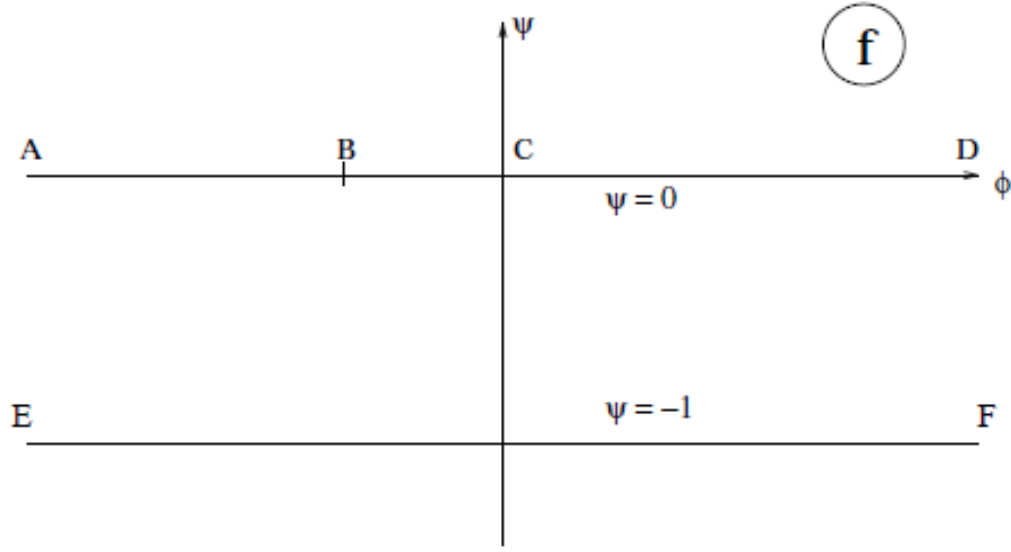


Figure 3.2 - Schéma d'un écoulement dans un plan complexe  $f$

L'objectif est de dériver la relation integrale, c'est que implique les inconnues sur la surface libre. Dans le plan  $f$  on ne peut pas terminer cet objectif, mais on peut terminer par le premier Cartographie conforme.

$$\varsigma = \alpha + i\beta = e^{\pi f} = e^{\pi(\varphi + i\psi)} = e^{\pi\varphi}(\cos(\pi\psi) + i\sin(\pi\psi)).$$

Le tableau suivant représente l'image des point d'intérêt d'un nouvel plan  $\varsigma$

plan cartisien	plan- $f$	plan - $\varsigma$
A	$\psi = 0, \varphi = \varphi_A = -\infty$	$\alpha = \alpha_A = 0, \beta = 0$
B	$\psi = 0, \varphi = \varphi_B < 0$	$\alpha = \alpha_B > 0, \beta = 0$
C	$\psi = 0, \varphi = \varphi_C = 0$	$\alpha = \alpha_C = 1, \beta = 0$
D	$\psi = 0, \varphi = \varphi_D = \infty$	$\alpha = \alpha_D = \infty, \beta = 0$
E	$\psi = -1, \varphi = \varphi_E = -\infty$	$\alpha = \alpha_E = 0, \beta = 0$
F	$\psi = -1, \varphi = \varphi_F = \infty$	$\alpha = \alpha_F = -\infty, \beta = 0$

Par conséquent, Les parois supérieures et la surface libre sont mappées à le positif l'axe réel du plan - $\varsigma$  et le paroi inférieure est mappé à le négatif l'axe réel du plan - $\varsigma$ . Un exemple des lignes de courant dans un fluide est  $\psi = -1/3$  et  $\varphi \in (-\infty, \infty)$ . Sous la transformation décrite par , cela est mappé à

$$\alpha = \frac{1}{2}e^{\pi\varphi} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\pi\varphi}.$$

Cet exemple, montre que toutes les lignes de courant dans le fluide sont mappées dans la région  $-\infty < \alpha < \infty, \beta \geq 0$ , c'est le demi plan supérieur  $\varsigma$ , voir la figure (3.3)

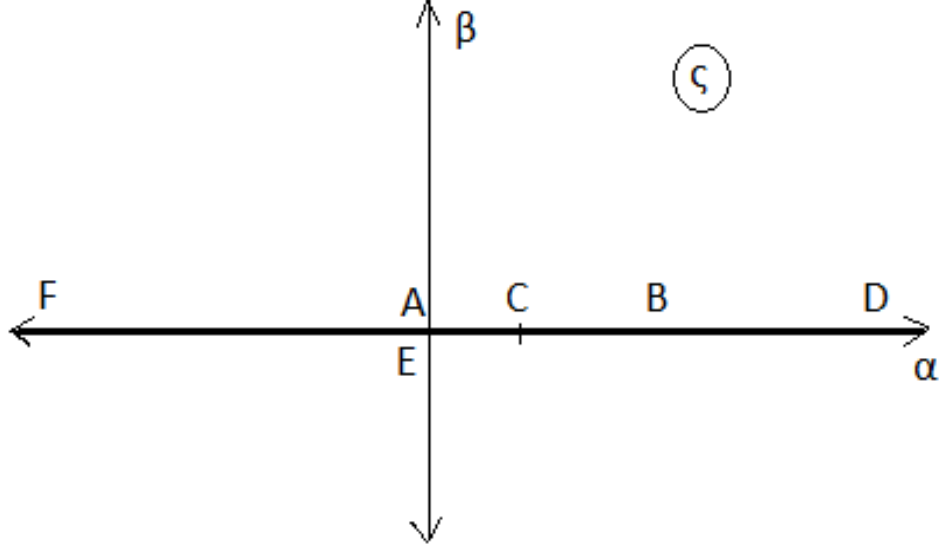


Figure 3.3 - L'écoulement dans un plan complexe- $\varsigma$

La vitesse complexe est introduite comme  $u - iv$ . La relation entre Les composants de vitesse,  $u$  et  $v$ , et la fonction de potentiel et de courant,  $\varphi$  et  $\psi$ , a déjà été mentionné. Ceux-ci peuvent être combinés pour donner

$$u - iv = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{df}{dz}. \quad (3.1)$$

De plus, la vitesse complexe et aussi est une fonction analytique de  $z = x + iy$ , puisque la dérivée de la fonction analytique est le même une fonction analytique. La nouvelle fonction complexe,  $\tau - i\theta = \ln\left(\frac{df}{dz}\right)$ , est introduit, et est lié à la vitesse complexe par

$$u - iv = e^{\tau - i\theta} \quad (3.2)$$

telque  $u$  est le composante horizontale de la vitesse,  $v$  est le composante verticale de la vitesse et  $\theta$  désigne l'angle entre le vecteur de vitesse et l'horizontale.

En termes de nouvelles variables complexe  $\tau$  et  $\theta$ . Les termes de vitesse, deviennent

$$u^2 + v^2 = e^{2\tau} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = e^{2\tau} \quad (3.3)$$

La condition sur la surface libre CD est donnée par l'équation de Bernoulli :

$$\bar{p} + \frac{1}{2}\rho q^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 \quad \text{sur } \psi = 0 \quad \varphi > 0 \quad (3.4)$$

La pression atmosphérique  $p_0$  est constante.

Où  $\bar{p}$  et  $q$  sont la pression du fluide et la vitesse juste à l'intérieur de la surface libre, respectivement. Le côté droit de l'équation (3.4) est évalué à partir du Condition loin en aval.

La relation entre  $\bar{p}$  et  $p_0$  est donnée par la formule de capillarité de Laplace

$$\bar{p} - p_0 = \bar{K}T \quad (3.5)$$

Où  $K$  est la courbure de la surface libre et  $T$  est la tension de surface.

Si nous remplaçons (3.5) en (3.4), nous obtenons:

$$\frac{1}{2}\bar{q}^2 - \frac{T}{\rho}\bar{K} = \frac{1}{2}U^2 \quad (3.6)$$

Dans les variables sans dimension (3.6) devient:

$$\frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{\alpha}K = \frac{1}{2} \quad (3.7)$$

Où  $\alpha = \frac{\rho U^2 H}{T}$ , est le nombre de Weber.

Pour que la courbure soit bien définie, nous présentons la fonction  $\tau - i\theta$  comme:

$$\delta = u - iv = e^{\tau - i\theta} \quad (3.8)$$

Où  $\theta$  désigne l'angle entre le vecteur de vitesse et l'horizontale. Avant d'écrire l'équation (3.7) par les nouvelles variables  $\tau$  et  $\theta$ , nous montrons que :

$$K = \frac{1}{R} = \left| \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right| e^\tau \quad (3.9)$$

Alors la condition de Bernoulli (3.7) en variables non dimensionnelles sur la ligne de courant libre CD s'écrit :

$$e^{2\tau} - \frac{2}{\alpha} \left| \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right| e^\tau = 1 \quad (3.10)$$

La condition cinématique sur AB, BC et EF peut être exprimée comme suit:

$$v = 0 \quad \text{sur} \quad \psi = 0 \quad -\infty < \varphi < \varphi_B \quad (3.11)$$

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \psi = 0 \quad \varphi_B < \varphi < 0 \quad (3.12)$$

$$v = 0 \quad \text{sur} \quad \psi = 0 \quad -\infty < \varphi < \infty \quad (3.13)$$

De plus de la relation (3.8) on tire :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = u = e^\tau \cos \theta \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v = e^\tau \sin \theta \end{cases} \quad (3.14)$$

Le problème consiste maintenant à chercher la fonction  $\delta(\tau, \theta)$  qui vérifie l'équation (3.10) avec les conditions (3.11), (3.12) et (3.13). Ce qui termine la formulation du problème.

## 3.2 Procédure numérique

Pour résoudre le problème numériquement, on applique la technique de troncation de série utilisée par Vanden-Broeck et Keller

Avant d'écrire la forme de la série, on transforme le domaine occupé par le fluide dans le plan  $f$  (Fig 3.2), en un quart de disque unité dans le premier quadrant de la variable  $t$  (Fig3.4). Les parois rigides AB, BC et EF se transforment sur les rayons du cercle et la surface libre CD sur la circonférence.

La transformation qui applique le domaine de l'écoulement du plan  $f$  dans le plan  $t$  est donnée par :

$$f = \frac{2}{\pi} \log \frac{2t}{1+t^2} \quad (3.15)$$

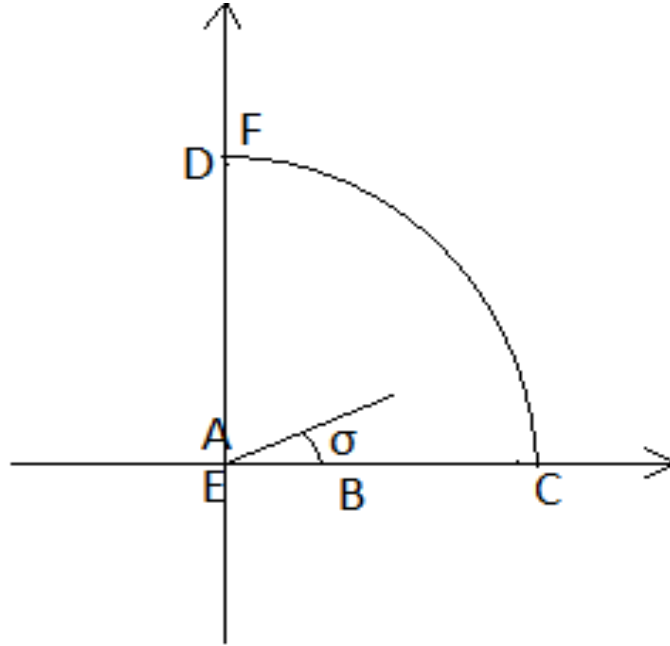


Figure 3.4- Plan de la variable  $t$

Les points A , B , C, D, E et F dans le plan  $f$  se transforment respectivement aux points  $t = 0, t = b, t = 1, t = i, t = 0, t = i, \forall b > 0$ . (fig 3.4).



La surface libre dans la nouvelle variable  $t$  est donnée par :

$$t = |t|e^{i\sigma} \quad \text{avec} \quad 0 \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2} \quad (3.16)$$

et dans le plan  $f$  par :

$$f = \varphi \quad \text{avec} \quad -\infty < \varphi < \infty \quad \text{sur } CD$$

En substituant (3.16) dans l'équation (3.15) on trouve :

$$f = \frac{2}{\pi} \log \frac{2e^{i\sigma}}{1 + e^{2i\sigma}} \implies f = \frac{2}{\pi} \log(\sec(\sigma)) \quad (3.17)$$

sur la surface libre  $CD$

ce qui implique

$$df = d\varphi = \frac{2}{\pi} \tan(\sigma) d\sigma$$

donc

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = \frac{\pi}{2} \cot(\sigma) \quad (3.18)$$

sur la surface libre  $CD$ .

D'autre part on a :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = \left| \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \right| \implies \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = \left| \frac{\pi}{2} \cot(\sigma) \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \right| \quad (3.19)$$

En utilisant (3.19), la condition de Bernoulli (3.10) devient :

$$e^{2\tau} - \frac{\pi}{\alpha} \cot(\sigma) \left| \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \right| e^\tau = 1 \quad \text{sur } CD \quad (3.20)$$

$$\left( \cot(\sigma) > 0, \text{ car } 0 < \sigma < \frac{\pi}{2} \right)$$

Reste maintenant à étudier le comportement de la vitesse au voisinage des singularités.

### 3.2.1 Comportement local de la vitesse au voisinage des singularités

les points singuliers dans le plan de l'écoulement réel  $z$  sont :  $z_B = iL$  et  $z_C = 0$  point de séparation entre la paroi rigide et la surface libre, qui correspondent respectivement aux points  $t_B = b, t_C = 1$  dans le plan  $t$ .

#### Comportement asymptotique au voisinage de $t=b$ :

Puisqu'au point  $t = b$ , on a un écoulement dans un angle de  $\frac{\pi}{2}$ , donc l'écoulement est caractérisé par la fonction potentielle complexe donnée dans le plan  $z$  par :

$$f \sim \frac{1}{2}c(z - iL)^2 \quad \text{lorsque } z \rightarrow iL \quad (3.21)$$

ce qui donne

$$(z - iL)^2 \sim \frac{2}{c}f \quad \text{lorsque } f \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow z - iL \sim \left( \frac{2}{c}f \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{lorsque } f \rightarrow 0 \quad (3.22)$$

On remplace l'équation (3.15) dans l'expression ci-dessus on trouve :

$$z - iL \sim \left( \frac{4}{\pi c} \log \frac{2t}{1+t^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{quand } t \rightarrow b \quad (3.23)$$

comme  $\zeta = \frac{df}{dz}$  ce qui donne

$$\zeta \sim c(z - iL) \quad \text{lorsque } z \rightarrow iL \quad (3.24)$$

En substituant (3.23) dans (3.24) on trouve :

$$\zeta \sim c \left( \frac{4}{\pi c} \log \frac{2t}{1+t^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{quand } t \rightarrow b \quad (3.25)$$

puisque

$$\log \frac{2t}{1+t^2} \sim ((t-b)^2 + O(t-b)^3) \quad t \rightarrow b \quad (3.26)$$

et comme

$$t - b = O(t^2 - b^2) \quad t \rightarrow b \quad (3.27)$$

alors

$$\zeta \sim c \left( \frac{4}{\pi c} \right)^{\frac{1}{2}} (t^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} \quad t \rightarrow b \quad (3.28)$$

C'est à dire :

$$\boxed{\zeta \sim O(t^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{lorsque } t \rightarrow b} \quad (3.29)$$

### Comportement asymptotique au point de séparation $t = 1$ .

La configuration de l'écoulement autour du point  $t = 1$  est la même qu'au point  $z_C = 0$ , nous avons un écoulement autour d'un angle  $\gamma$ , où l'écoulement est caractérisé par la fonction potentielle suivante :

$$f \sim \frac{\gamma c}{\pi} (z - 0)^{\frac{\pi}{\gamma}} \quad \text{lorsque } z \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow f \sim \frac{\gamma c}{\pi} (z)^{\frac{\pi}{\gamma}} \quad \text{lorsque } z \rightarrow 0 \quad (3.30)$$

$$z \sim \left( \frac{\pi}{\gamma c} f \right)^{\frac{\pi}{\gamma}} \quad (3.31)$$

Alors

$$\zeta = \frac{df}{dz} \sim c z^{\frac{\pi}{\gamma}-1} \quad \text{lorsque } z \rightarrow 0 \quad (3.32)$$

puisque sur la surface libre  $\psi = 0$ ; alors :

$$f = \varphi = \frac{2}{\pi} \log \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{sur } CD \quad (3.33)$$

de l'équation (3.15) et (3.32) on tire :

$$z \sim \left( \frac{2}{\gamma c} \log \frac{2t}{1+t^2} \right)^{\frac{\pi}{\gamma}} \quad \text{quand } t \rightarrow 1 \quad (3.34)$$

En substituant (3.34) dans (3.32) on trouve :

$$\zeta \sim c \left( \left( \frac{2}{\gamma c} \log \frac{2t}{1+t^2} \right)^{\frac{\pi}{\gamma}} \right)^{\frac{\pi}{\gamma}-1} \quad (3.35)$$

Puisque

$$\log \frac{2t}{1+t^2} \sim ((t-1)^2 + O(t-1)^3) \quad t \rightarrow 1$$

et comme

$$t - b = O(t^2 - 1) \quad t \rightarrow b$$

Alors

$$\zeta \sim c \left( \frac{2}{\gamma c} \right)^{1-\frac{\gamma}{\pi}} ((t^2 - 1)^2)^{1-\frac{\gamma}{\pi}} \quad \text{quand } t \rightarrow 1$$

C'est-à-dire comportement de l'écoulement au voisinage du point de séparation s'écrit :

$$\boxed{\zeta \sim O((t^2 - 1)^2)^{1-\frac{\gamma}{\pi}} \quad \text{quand } t \rightarrow 1} \quad (3.36)$$

### 3.3 Formulation de la série

Après avoir déterminé le comportement local de la vitesse au voisinage de point de stagnation et au point singulier et suivant H. Mekias et J. M. Vanden-Broeck, on cherche la vitesse  $\zeta(t)$  sous la forme :

$$\zeta(t) = g(t)\Omega(t)$$

Où  $g(t)$  contient les singularités et les zéros montrés précédemment, et la fonction  $\Omega(t)$  est bornée et continue sur le cercle d'unité  $|t| = 1$  et analytique à l'intérieur. Les conditions (3.6), (3.7) et (3.8) montrent que  $\Omega(t)$  peut être développée en série entière en  $t$ . Par conséquent,

$$e^{\tau - i\theta} = \zeta(t) = \sqrt{b^2 - t^2} (1 - t^2)^{2-\frac{2\gamma}{\pi}} \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^{2n} \right). \quad (3.37)$$

Les coefficients  $a_n$  sont des inconnus à déterminer. En choisissant les coefficients  $a_n$  réels, la vitesse donnée par la relation (3.37) satisfait toutes les conditions (3.11), (3.12) et (3.13). On détermine les coefficients  $a_n$  et l'angle  $\gamma$  de tel sorte que l'équation de Bernoulli (3.10) soit satisfaite.

On introduit la notation  $t = |t| e^{i\sigma}$  de sorte que les points sur BC sont donnés par  $t = e^{i\sigma}, 0 < \sigma < \frac{\pi}{2}$ . En utilisant (3.37) l'équation (3.10) devient :

$$e^{2\bar{\tau}} - \frac{\pi}{\alpha} \cot(\sigma) \left| \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \sigma} \right| e^{\bar{\tau}} = 1 \quad \text{sur } CD \quad (3.38)$$

Ici  $\bar{\tau}$  et  $\bar{\theta}$  dénotent respectivement les valeurs des fonctions  $\tau$  et  $\theta$  sur la surface libre CD.

Pour la résolution numérique du problème nous faisons une troncature de la série définie dans (3.37) après  $N$  termes. On détermine les  $N$  coefficients  $a_n$  et l'angle de séparation  $\gamma$  par collocation. Ainsi, on introduit la discrétisation de l'intervalle  $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$  en  $N + 1$  points  $\sigma_I$  par

$$\sigma_I = -\frac{\pi}{2(N+1)}(I-1), \quad I = 1, \dots, N+1 \quad (3.39)$$

Les deux équations (3.37) et (3.39) nous permettent de trouver les expressions  $[\bar{\tau}(\sigma)]_{\sigma=\sigma_I}$ ,  $[\bar{\theta}(\sigma)]_{\sigma=\sigma_I}$  et  $\left[\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \sigma}\right]_{\sigma=\sigma_I}$  en termes de  $\gamma$  et les coefficients  $a_n$ , lesquelles, une fois substitués dans l'équation (3.39), deviennent en chaque point  $\sigma_I$ .

On obtient  $(N+1)$  équations algébriques non linéaires pour  $(N+1)$  inconnus  $a_n, n=1, \dots, N$ , et  $\gamma$ . Le système de  $(N+1)$  équations non linéaires à  $(N+1)$  inconnues est résolu par la méthode de Newton.

Enfin, la forme de la surface libre est obtenue en intégrant numériquement la relation

$$\frac{\partial x}{\partial \sigma} = \frac{2C}{\pi} \cot(\sigma) e^{\bar{\tau}} \cos(\bar{\theta})$$

et

$$\frac{\partial y}{\partial \sigma} = \frac{2C}{\pi} \cot(\sigma) e^{\bar{\tau}} \sin(\bar{\theta})$$

## 3.4 Conclusion générale

Dans ce travail, on considère un problème d'écoulement bidimensionnel à surface libre avec les effets de la gravité et de la tension de surface sont négligeables .

L'objectif de ce travail est de donner une formulation mathématique à ce problème, et d'étude la technique de résolution du problème analytiquement avec les méthode d'hodographe et la transformation de Schwarz-Cristoffel, et numériquement par la technique de troncation de la série pour chercher la solution exacte.

# Bibliographie

- [1] **Sakir Amiroudine et Jean-Luc Battaglia**, Mécanique des fluides, cours et exercices corrigés, Dunod, Paris, 2011.
- [2] **Patrick Heurre**, Mécanique des fluides, TOME I, 1998.
- [3] **Jean-Paul Caltagirone**, Physique des écoulement continus, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.
- [4] **Darroz J.S. et Francois C**, Mécanique des fluides incompressibles, Springer Berlin Heidelberg, 1982.
- [5] **P.DOLBEAULT**, Analyse complexe, Masson, Paris, 1990.
- [6] **Riadh BEN HAMOUDA**, Notion de mécanique des fluides, cours et exercices corrigés, Centre de Publication Universitaire, Tunis 2008.
- [7] **P.Chassaing, J.-B.Cazalbo, X.Carbonneau et L.Joly**, Mécanique des fluides, Bréal 2005.
- [8] **Christophe Ancey**, Analyse différentielle, Outils mathématiques pour la dynamique des fluides, Laboratoire hydraulique environnementale (LHE) École Polytechnique Fédérale de Lausanne Écublens.
- [9] **Ranald V.Giles, Jack B.Evett et Cheng Liu**, Serie Schaum, Mécanique des fluides et hydraulique, traduit par Michel Lobenberg, 2<sup>e</sup> édition.
- [10] **Murray.R**, Variables Complexes, Cours et problèmes, est traduit de : Theory and Problems of Complex Variables, Spiegel, McGraw-Hill Inc, New York, 1973.



- [11] **Scott Tooley**, The effects of surface tension on free surface flows intersecting rigid walls, A thesis submitted to school of mathematics of the university of East Angila for the degree of doctor of philosophy, July 2002.
- [12] **Abdelkader Gasmi, H.Mekias**, A jet from container and flow past a vertical flat plate in a channel with the surface tension effects, Applied Math Sciences, vol.1, 2007.
- [13] **Kherfi Salima**, Problème des écoulements au dessus des obstacles avec l'effet de gravité, Mémoire Master, Université de Ouargla 2015.
- [14] **Laiadi Abdelkader**, Effet de la tension de surface sur des écoulement au dessus des obstacles, Mémoire de Magistère, Université de Ouargla 2012.
- [15] **Rimi Khazzani**, Résolution analytique du problème d'écoulement sans l'effet de gravité, Mémoire Master, Université de Ouargla 2016.